

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2014 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $N = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 2012^3 + 2014^3$ ，則 N 的末兩位數碼為_____。

答：_____

2. 設 $M = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + 101 \times 102 \times 103$ ，則 $M =$ _____。

答：_____

3. 若 n 為一個正整數，則滿足方程

$$\frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{5}{n^3} + \dots + \frac{n^3 - 5}{n^3} + \frac{n^3 - 4}{n^3} + \frac{n^3 - 3}{n^3} = 169$$

之 n 的值為_____。

答：_____

4. 某社區中有 12 住戶，林先生是其中一個住戶，且林先生的家每天收到的信都比這個社區中任一其他住戶收到的信多，如果這個社區今天共收到 58 封信，則林先生家今天收到的信至少有_____封。

答：_____ 封

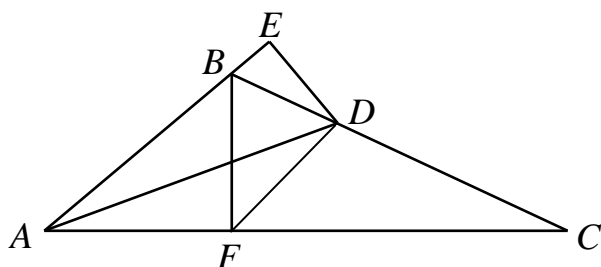
5. 若正整數 n 的函數 $f(n)$ 滿足

$$f(n+2) = f(n+1) - f(n),$$

則 $f(n)$ 最多能有_____個不同的值。

答：_____ 個

6. 下圖中，已知線段 AD 為 $\angle EAC$ 的角平分線且 $BF \perp AC$ ，若 $\angle E = 90^\circ$ 、 $\angle ADB = 45^\circ$ 、 $\angle BDE = 25^\circ$ ，則 $\angle FDC =$ _____。



答：_____

7. 若 k 為正整數，且 $k < 50$ ，則使 $k^3 + 11$ 能被 12 整除的 k 共有 _____ 個。

答： _____ 個

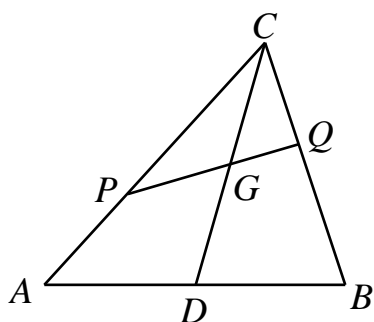
8. 已知符號 $[A]$ 表示不大於 A 的最大整數值，若 $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{400}}$ ，則 $[A] =$ _____。

答： _____

9. 有 n 個學校派學生代表參加聯歡活動，每個學校參加的學生最少為 1 人最多為 28 人。已知參加活動的各校總學生數為 1825 人，現擬將他們分組做競賽活動，要求每組學生最少為 1 人最多為 170 人且同一學校的學生一定要分在同一組，則至少要 _____ 組才必定能滿足上述的要求。

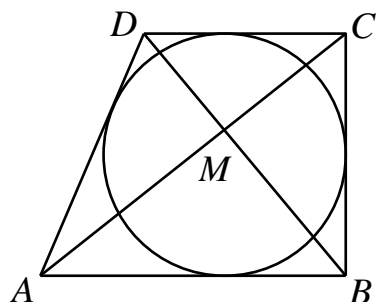
答： _____ 組

10. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 為 AB 的中點， G 為 CD 的中點，過 G 作一直線分別與 AC 、 BC 交於點 P 、 Q ，則 $\frac{CA}{CP} + \frac{CB}{CQ}$ 之最大值為 _____。



答： _____

11. 如下圖，梯形 $ABCD$ 之對角線 AC 、 BD 交於點 M ， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ 。已知梯形 $ABCD$ 有半徑為 5 的內切圓，則 $\triangle ADM$ 的面積之最小值為 _____。



答： _____

12. 設 $a > 0$ ，若關於 x 、 y 、 z 的三元方程組 $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ xy + xz + 2yz = 2 \end{cases}$ 有實數解，則 a 的最小值為 _____。

答： _____

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在 3×3 的方格表的正中央的小方格內填入數 9，然後在邊緣的八個小方格內不重複地填入數 1~8，使得在角落的每個 2×2 子方格表的四個小方格內的數之和都相等。若將旋轉、翻轉視為相同，請問共有多少組不同的解？

例

4	6	5
2	9	1
7	3	8

 是其中一解，

4	5	6
2	9	1
7	3	8

 不是。

(請列出所有可能的解。)

答：

2. 已知一個五位數 \overline{abcde} 是由五個相異的數碼 1、3、5、7、9 所組成（但不一定依此順序），已知它的前兩位數 \overline{ab} 與末兩位數 \overline{de} 之乘積減去中間的數 c 恰好等於一個各位數碼都相同的四位數。請問滿足上述條件的最大五位數是什麼？

答： _____

3. 如下圖，在正三角形 ABC 中，點 D 、 E 分別為邊 BC 、 AC 上的點，並且滿足 $CD = AE$ 。設 BE 與 AD 交於點 F ，連接 CF ，過點 E 作 CF 的平行線交 AD 於點 G ，請證明 $AG = FE$ 。

